

Q2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|I - s_n| = \frac{1}{(2n+3)(n+1)}.$$

Q3. Informatique : écrire une fonction récursive factorielle qui prend en argument un entier naturel n et renvoie l'entier $n!$.

Q4. Informatique : en déduire un script, qui détermine un entier N , tel que $|I - s_N| < 10^{-6}$.

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Q5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$.

En déduire que :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points x_0, x_1, \dots, x_n dans $[a, b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i , un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i , c'est-à-dire tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(x_i) = f(x_i)$.

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(X).$$

Q7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i , puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.2 - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

- Q8. Informatique** : si y_0, \dots, y_n sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^n y_i l_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i . Écrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i , y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x , a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a .
Par exemple, si $x = [-1, 0, 1]$ et $y = [4, 0, 4]$, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi, `lagrange(x, y, 3)` renverra 36.
- Q9. Informatique** : chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues a_0, \dots, a_n :

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases} \iff V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n + 1$.

Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n , lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i .

On note $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^n (X - x_i).$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a, b]$, la propriété suivante notée \mathcal{P}_x :

$$\exists c_x \in]a, b[, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x).$$

- Q10. Résultat préliminaire** : soit $p \in C^{n+1}$. Démontrer que si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p -fois dérivable qui s'annule $p + 1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.
- Q11.** Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété \mathcal{P}_x est vraie.

On fixe x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ . Soit λ un réel. On définit sur $[a, b]$ une application F par :

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t).$$

- Q12.** Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.
- Q13.** Démontrer que F s'annule $n + 2$ fois et en déduire que \mathcal{P}_x est vraie.