CCP MP1 2018
Un corrigé

1 "Permutation limite-intégrale" et intégrales de Gauss

1.1 Utilisation d'une série entière

Q 1 La fonction exp est développable en série entière entière de rayon de convergence in ni et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

En utilisant ceci avec x^2, on en déduit que

$$I = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (\ \ 1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}\ dx$$

$f_n\ :\ x \mapsto (\ \ 1)^k \frac{x^{2k}}{(k\ )}$ est continue sur $[0,1]$ et $\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0,1]$. On est dans le cas simple où l'interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ \ 1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\ dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ \ 1)^n}{(2n+1)n!}}$$

Q 2 $u_n = \frac{(\ \ 1)^n}{(2n+1)n}$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et convergente de limite nulle. La règle spéciale s'applique à la série $\sum(u_k)$. Elle indique que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\ \ \le |u_{n+1}|$$

Ceci s'écrit exactement

$$\boxed{|I \quad s_n| \le \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}}$$

Q 3
```
def factorielle(n):
    if n==0: return 1
    else: return (factorielle (n-1))*n
```

Q 4 On calcule les termes u_k dé nis en question 2 tant le module du terme est inférieur à $10^{\ \ 6}$.

```
def u(k):
    return (-1)**k/((2*k+1)*factorielle(k))

k=0
while abs(u(k))>10**(-6):
    k=k+1

print(k)
```

1.2 Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q 5 Soit $x \geq 0$. $x^2/n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{2}$. Pour ces n, $1 \quad \frac{x^2}{n} > 0$ et donc

$$\forall n \geq n_0,\ f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 \quad \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

Le terme dans l'exponentielle équivaut, quand $n \to +\infty$, à $n \times \left(\quad \frac{x^2}{n}\right) = \quad x^2$ et tend donc vers $\quad x^2$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc $f_n(x) \to e^{\quad x^2}$ quand $n \to +\infty$.

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simpelment sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers } x \mapsto e^{\quad x^2}}$$

Q 6 Par concavité de la fonction logarithme,

$$\forall u > \quad 1,\ \ln(1+u) \leq u$$

Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \quad ^*$. $x^2/n \in [0,1]$. Si $x^2/n \in [0,1[$ alors (croissance de exp et notre inégalité de concavité)

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 \quad \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{\quad x^2}$$

et le résultat reste vrai si $x^2/n = 1$ ($0 \leq e^{\quad x^2}$ dans ce cas). Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{\quad x^2}}$$

Utilisons alors le théorème de convergence dominée.
- (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction continue sur $[0,1]$.
- $\forall n \in \quad ^*,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{\quad x^2}$ et $x \mapsto e^{\quad x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque continue sur le SEGMENT.

Le théorème s'applique et donne

$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1 \quad \frac{x^2}{n}\right)^n$$

On développe la puissance par formule du binôme et par linéarité du passage à l'intégrale,

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 \left(\quad \frac{x^2}{n}\right)^k dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(\quad 1)^k}{n^k(2k+1)}}$$

2 Notion de polynôme interpolateur

2.1 Existence du polynôme interpolateur

Q 7 x_k est racine de l_i pour $i \neq k$ et $l_i(x_i) = 0$, c'est-à-dire

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,k} = f(x_k)$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0, \ldots, x_n$.
Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P \quad L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule aux points $x_0, \ldots, x_n$. C'est un polynôme de degré $\leq n$ ayant au moins $n+1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_0, \ldots, x_n}$$

2.2 Calcul e ectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q 8 Une première fonction `l(i,x,a)` permet le calcul de $l_i(a)$ associé aux x_k.

```
def l(i,x,a):
    r=1
    for k in range(len(x)):
        if k =i:
            r=r*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
    return r
```

Il reste à calculer la somme dé nissant L_n associé aux y_i.

```
def lagrange(x,y,a):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a)*y[i]
    return s
```

Q 9 La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs noter que d'après le cours cette matrice est inversible quand les x_i sont deux à deux distincts ce qui permet de prouver à nouveau l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur.
Dans la résolution par méthode de Gauss,

- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait apparaître des zéros par $n \quad 1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)
- on procède de même avec les colonnes $2, \ldots, n+1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1}, \ldots, x_0$ en $O(1+2+\cdots+(n+1)) = O(n^2)$ opérations.

$$\boxed{\text{La complexité du calcul est } O(n^3)}$$

2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

Q 10 Montrons par récurrence (nie) que la propriété : "$\phi^{(k)}$ s'annule $p+1 \quad k$ fois" est vraie pour $k = 0, \ldots, p$.

- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur ϕ.
- Soit $k \in [\![0, p \quad 1]\!]$ tel que le résultat soit vrai au rang k. On note $y_1 < \cdots < y_{p+1 \quad k}$ des points d'annulation de $\phi^{(k)}$. Par théorème de Rolle appliqué à $\phi^{(k)}$, $\phi^{(k+1)}$ s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$ pour $i = 1, \ldots, p \quad k$. $\phi^{(k+1)}$ admet donc au moins $p \quad k$ annulations et lerésultat est vrai au rang $k+1$.