CCINP MP 2019- Mathématiques 2

Corrigé proposé par V. Que elec.
Lycée Sainte-Anne, Brest.

EXERCICE I

Q1. Voici un code possible.

```
import math#Suppose definitivement importe dans la suite
def estPremier(n):
    """Donnee : un entier naturel n superieur ou egal a 2
    Resultat : le booleen indiquant si n est premier ou non"""
    for i in range(2,int(math.sqrt(n))+1):
        if n%i==0:
            return False
    return True
```

Q2. Voici un code possible.

```
def liste_premiers(n):
    """Donnee : un entier naturel n superieur ou egal a 2.
    Resultat : une liste contenant tous les entiers premiers
    inferieurs ou egaux a n."""
    L=[]
    for i in range(2,n+1):
        if estPremier(i):
            L.append(i)
    return L
```

Q3. Voici un code possible.

```
def valuation_p_adique(n,p):
    """Donnee : deux entiers naturels n et p
    superieurs ou egaux a 2.
    Resultat : la valuation p adique de n
    obtenue par un algorithme iteratif"""
    compt=0
    while n%p==0:
        compt+=1
    return compt
```

Q4. Voici un code possible.

```python
def valuation_p_adique(n,p):
    """Donnee : deux entiers naturels n et p
    superieurs ou egaux a 2.
    Resultat : la valuation p adique de n
    obtenue par un algorithme recursif"""
    if n%p!=0:
        return 0
    else:
        return 1+valuation_p_adique(n//p,p)
```

Q5. Voici un code possible.

```python
def vdecomposition_facteurs_premiers(n):
    """Donnee : un entier naturel n superieur ou egal a 2.
    Resultat : sa decomposition en facteurs premiers
    comme une liste de couples, conformement a l'enonce."""
    L=[]
    for i in range(2,int(math.sqrt(n))+1):
        if estPremier(i):
            L.append((i,valuation_p_adique(n,i)))
    return L
```

EXERCICE II

Q6. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\Big)$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$). On a bien $u \neq 0_{\mathcal{L}\ E)}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

Q7. Montrons les implications suggérées par l'énoncé. Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ définis comme dans l'énoncé.

i)⇒ii) On a :

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y)\rangle &= \langle x, v(u(y))\rangle && \text{par définition de } v \\
&= \langle x, u(v(y))\rangle && \text{d'après l'hypothèse i)} \\
&= \langle v(x), v(y)\rangle && \text{par définition de } v \text{ et symétrie du produit scalaire}
\end{aligned}$$

ii)⇒iii) Est immédiat en choisissant $y = x$.

iii)⇒ii) Employons une identité de polarisation.

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{2}(\|u(x) + u(y)\|^2 \quad \|u(x)\|^2 \quad \|u(y)\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|u(x + y)\|^2 \quad \|u(x)\|^2 \quad \|u(y)\|^2) && \text{car } u \text{ est linéaire} \\
&= \frac{1}{2}(\|v(x + y)\|^2 \quad \|v(x)\|^2 \quad \|v(y)\|^2) && \text{d'après l'hypothèse iii)} \\
&= \frac{1}{2}(\|v(x) + v(y)\|^2 \quad \|v(x)\|^2 \quad \|v(y)\|^2) && \text{car } v \text{ est linéaire} \\
&= \langle v(x), v(y)\rangle && \text{par une identité de polarisation}
\end{aligned}$$