PROBLÈME
Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1, \qquad \forall n \geq 1,\ b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Leonhard Euler (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}.$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli b_n afin d'obtenir des valeurs exactes de $\zeta(2k)$.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

Q5. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q6. On considère la fonction Python suivante `binom(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

```
def binom(n, p):
    if not(0<= p <= n):
        return 0
    return factorielle(n)//(factorielle(p)*factorielle(n-p))
```

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30,10)` ?
Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ? Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par
`return factorielle(n)/(factorielle(p)*factorielle(n-p))` ?

Q7. Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a
$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$
En déduire une fonction récursive `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Q8. Écrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n. On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.
Par exemple `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \dfrac{5}{66}$.

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :
$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :
$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$
Démontrer que :
$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$
En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :
$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a,b) \in A\ ,\ ab = n\}$.