

CCINP 2022

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

NB : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème

EXERCICE

M. Toutlemonde habite dans un immeuble dont la porte d'entrée est sécurisée par un code à 4 chiffres dont chacun est compris entre 0 et 9. Malheureusement, il se trouve devant cette porte et il en a oublié le code.

- Q1.** Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ puis en déduire son espérance.
- Q2.** En essayant un code au hasard, quelle est la probabilité de tomber sur le bon code ?
- Q3.** M. Toutlemonde décide de trouver le bon code en procédant de la manière suivante : il essaye un code au hasard choisi par les codes non encore testés. On note X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code.
Déterminer la loi de X et donner son espérance.

Q4. A la place de la stratégie précédente, M. Toutlemonde essaye des codes au hasard, sans se soucier du fait qu'il les ait déjà essayés ou non. On note encore X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code.
Déterminer la loi de X et donner son espérance.

Q5. *Informatique Pour Tous.*

Compléter, en langage Python, le script suivant pour qu'il simule une personne essayant de deviner le code 4714 :

```
code=4714
n=int(input ('Taper un code à 4 chiffres :'))
k=.....
while .....
    .....
    .....
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

(..... représente une instruction ou une partie d'instruction à compléter.)

Pour ne plus oublier le code, M. Toutlemonde décide de l'écrire sur un papier qu'il garde dans sa poche. Pour ne pas se faire dérober le code il le crypte de la manière suivante : il remplace chacun des 4 chiffres par lui-même additionné de 5 et réduit modulo 10. Par exemple, le code 4714 est crypté 9269.

Q6. *Informatique Pour Tous.*

Écrire, en langage Python, une fonction `crypte(m)` qui reçoit en entrée une liste `m` de 4 chiffres et renvoie en sortie la version cryptée de cette liste. Par exemple, `crypte([4,7,1,4])` renvoie `[9,2,6,9]`.

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$

Q7. Démontrer que H est définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Donner une expression de $H'(x)$.

Q8. Étudier la parité de la fonction H .

Q9. Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire un développement en série entière de la fonction H au voisinage de 0, en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

Q10. Si $x > 0$, démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du.$$