CONCOURS COMMUN INP 2022
CORRIGÉ DE M THÉM TIQUES 1- MP

m.laamoum@gmail.com

Je remercie infiniment Mr . El Hammoudi qui a rédigé la partie informatique du Problème .

EXERCICE

Q1. $X \sim \mathcal{G}(p)$ $p \in]0,1[$, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p.q^{k\ \ 1}$ avec $q = 1 \quad p$.
Soit $t \in [\ \ 1, 1]$,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \quad (t^X) \\ &= \sum_{k\ \ 1}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k\ \ 1}^{+\infty} t^k p.q^{k\ \ 1} \\ &= \frac{tp}{1 \quad qt} \end{aligned}$$

On a $\ (X) = G'_X(1) = \dfrac{1}{p}$.

Q2. Le nombre de codes possible est 10^4 donc la probabilité de tomber sur le bon code est $\dfrac{1}{10^4}$

Q3. L'expérience est assimilée à un tirage sans remise . Le nombre maximal de tirages est 10^4 donc $X(\Omega) = [\![1, 10^4]\!]$.
Soit A_k l'événement : " M. Toutlemonde obtient le bon code au k ieme essai " , on alors

$$[X = k] = \overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_{k\ \ 1}} \cap A_k \tag{1}$$

la formule des probabilités composées donne

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\ \ \overline{A_1}\big) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\ \ \overline{A_2}\big) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}\ \ \overline{A_3}\big) ... \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k\ \ 2}}}\ \ \overline{A_{k\ \ 1}}\big) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k\ \ 1}}}(A_k) \tag{2}$$

et on a :

- $\mathbb{P}\ \ \overline{A_1}\big) = 1 \quad \frac{1}{10}$
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{i\ \ 1}}}\ \ \overline{A_i}\big) = 1 \quad \frac{1}{10 \quad i+1} = \frac{10 \quad i}{10 \quad i+1}$ pour $2 \leq i \leq k \quad 1$.
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k\ \ 1}}}(A_k) = \frac{1}{10 \quad k+1}$

insi

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{10 \quad 1}{10} \times \frac{10 \quad 2}{10 \quad 1} \times ... \times \frac{10 \quad k+1}{10 \quad k+2} \times \frac{1}{10 \quad k+1} = \frac{1}{10}$$

X suit la loi uniforme sur $[\![1, 10^4]\!]$ et $\ (X) = \dfrac{10^4 + 1}{2}$.

Q4. L'expérience est assimilée à un tirage avec remise , donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On conserve les notations de Q3 , cette fois on a

- $\mathbb{P}\ \ \overline{A_1}\big) = 1 \quad \frac{1}{10}$
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{i\ \ 1}}}\ \ \overline{A_i}\big) = 1 \quad \frac{1}{10}$ pour $2 \leq i \leq k \quad 1$.
- $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap .. \cap \overline{A_{k\ \ 1}}}(A_k) = \frac{1}{10}$

insi

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{1}{10^4}.\left(1\quad\frac{1}{10^4}\right)^{k\quad 1}$$

X suit une loi géometrique de paramètre $\dfrac{1}{10^4}$ et $\quad(X)=10^4$.

Q5. *Inform tique Pour Tous.*

```
code = 4714
n = int(input('T per un code à 4 chiffres : '))
# L  p rtie à compléter
k = 1
while n!=code :
    n = int(input('T per un code à 4 chiffres : '))
    k += 1
# Fin de l  p rtie
print('Vous  vez trouvé le code en '+str(k)+' ess is.')
```

Q6. *Inform tique Pour Tous.*

```
def crypte(m):
    return [(x+5)%10 for x in m]
```

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Soit $H(x)=\displaystyle\int_0^x e^{it^2}dt.$

Q7. La fonction $f:t\mapsto e^{it^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc H l'est aussi et $H'(x)=e^{ix^2}$.

Q . On a

$$\begin{aligned} H(\quad x) &= \int_0^{\quad x} e^{it^2}dt \\ &\underset{s\quad t}{=} \quad \int_0^x e^{is^2}ds \\ &= \quad H(x) \end{aligned}$$

H est impaire

Q9. $t\mapsto e^t$ est développable en série entière au voisinage de 0 donc $t\mapsto e^{it^2}$ l'est aussi et

$$e^{it^2}=\sum_{n\quad 0}^{+\infty}\frac{(i)^n}{n!}t^{2n}\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$, sur le segment $[0,x]$ on peut intégrer , terme à terme, cette série entière , ce qui donne :

$$H(x)=\sum_{n\quad 0}^{+\infty}\frac{(i)^n}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$$

Q10. Si $x>0$, on fait le changement $u=t^2$, on obtient :

$$H(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du.$$