
Epreuve de mathématiques

La présentation des résultats, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements mis en oeuvre entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de la calculatrice est interdite. Durée : 4 heures.

Problème 1 - adapté du concours CCINP - PC 2019

Problème 2 - adapté du concours du CAPES Externe 2014

Consignes particulières :

- on n'oubliera pas de souligner ou d'encadrer ses résultats à chaque question, et on ne le fait pas à la fin, mais pendant l'épreuve.
Des points de présentation et de mise en oeuvre des raisonnements seront compris dans le barème.

Exercice 1 Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

- On rappelle que par définition, l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est **convergente** si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \text{ existe et est finie.}$$

Et dans ce cas, on note $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$.

- On rappelle que par définition, une telle fonction f est **intégrable** si l'intégrale de $|f|$ sur $[0, +\infty[$ est convergente.

Et dans ce cas, on admet que l'intégrale de f est aussi convergente sur $[0, +\infty[$.

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on définit l'application ϕ par :

$$\phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

- Montrer que pour tout $A > 0$, l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.

- Considérons P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Calculer la limite de $t^2 P(t)Q(t)e^{-t}$ quand $t \rightarrow +\infty$. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, |P(t)Q(t)e^{-t}| \leq \frac{1}{t^2}$$

- Justifier alors que l'intégrale définissant $\phi(P, Q)$ est convergente. On pourra établir que $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

- Conclure que $\phi(X^k, 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie B - Construction d'une base orthogonale de vecteurs propres

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'$$

- Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Calculer $\alpha(1)$, $\alpha(X)$ et $\alpha(X^2)$.

- De la même façon, calculer $\alpha(X^n)$, puis écrire M la matrice de α dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

- On note P_M le polynôme caractéristique associé à la matrice M . Montrer que P_M est scindé à racines simples et préciser le spectre de M .

On peut en déduire que α est diagonalisable, et en notant E_k le sous-espace propre $\text{Ker}(\alpha + k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, il vient :

$$\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^n E_k$$

- Justifier que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim(E_k) = 1$.

- En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $E_k = \text{Vect}(P_k)$.

- Montrer que P_k est nécessairement de degré k .

- Etablir alors que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ désigne une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Déterminer P_0 , P_1 les polynômes unitaires qui engendrent E_0 et E_1 .

- Vérifier de la même façon que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

- Montrer que :

$$\phi(\alpha(P), Q) = - \int_0^{+\infty} t P'(t) Q'(t) e^{-t} dt$$

- En déduire que $\phi(\alpha(P), Q) = \phi(P, \alpha(Q))$.

- Prouver alors que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ désigne une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est à dire que pour tout $k < l$:

$$\phi(P_k, P_l) = 0$$

Partie C - Méthode de quadrature de Gauss

Les polynômes précédemment construits sont aussi appelés les **polynômes de Laguerre**. On admet d'ailleurs que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$ et on souhaite montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) \quad (*)$$

19. Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

20. Etablir alors qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

Exercice 2 Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.

- On dit que la suite (u_n) **converge à une vitesse géométrique** vers un réel α s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$$

- On dit que la suite (u_n) **converge à une vitesse quadratique** vers un réel α s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|^2$$

Partie A - Etude d'une suite convergeant vers un point fixe

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \alpha$. On notera alors C_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On note $g : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{2}(t + \frac{\alpha}{t})$.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Justifier l'équivalence : x_0 est un point fixe de g si et seulement si x_0 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
- Après avoir déterminé l'équation de la tangente T_t à la courbe C_f au point d'abscisse t , démontrer que le réel $g(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n}) \end{cases}$$

- On suppose que $u_0 = \sqrt{\alpha}$. Etablir dans ce cas que la suite (u_n) est constante.
- On suppose dans la suite que $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > \sqrt{\alpha}$.
- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du deuxième terme.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente de limite $\ell = \sqrt{\alpha}$.
- Dans cette question, on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite (u_n) dans le cas particulier où $\alpha = 2$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}|u_n - \sqrt{2}|^2$$

et préciser la vitesse de convergence de la suite (u_n) vers α .

Partie B - Suite de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}$

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. On dit que la suite (u_n) est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \epsilon$$

- Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une suite $(v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, |u_{n+p} - u_n| \leq v_n$$

En revenant à la définition de la limite, justifier alors que (u_n) est une suite de Cauchy.

Cette première question nous donne en fait une condition très pratique pour établir qu'une telle suite (u_n) est de Cauchy.

- Deux exemples.** On considère les suites (u_n) et (S_n) définies par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ avec } q \text{ fixé dans }]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \end{cases}$$

- Montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy.
- Montrer que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k$$

puis, justifier que (S_n) est bien une suite de Cauchy.

- Soit (u_n) une suite réelle qu'on suppose de Cauchy.

- Montrer que (u_n) est nécessairement bornée.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente. On pourra faire appel au théorème de Bolzano-Weierstrass.

Partie C - Vers un théorème de point fixe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les deux hypothèses suivantes :

- l'intervalle $[a, b]$ est stable de sorte que $f([a, b]) \subset [a, b]$,
- f est contractante, c'est à dire qu'il existe $\gamma \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|$$

11. Montrer que f est nécessairement continue sur $[a, b]$.

12. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$,

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} |u_1 - u_0|$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente dans I . Que peut-on dire de la vitesse de convergence de (u_n) ?

13. Etablir alors que la fonction f admet un unique point fixe $\ell \in [a, b]$.