

---

## Epreuve de mathématiques

*La présentation des résultats, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements mis en oeuvre entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**L'utilisation de la calculatrice est interdite. Durée : 4 heures.**

---

Problème 1 - adapté du concours CCINP PC - 2021

Problème 2 - adapté du concours du CCINP MP - 2017

### Consignes particulières :

- on n'oubliera pas de souligner ou d'encadrer ses résultats à chaque question, et on ne le fait pas à la fin, mais pendant l'épreuve. Des points de présentation et de mise en oeuvre des raisonnements seront compris dans le barème.
- les algorithmes demandés seront encodés dans le langage Python. On veillera à s'appliquer sur la structure du langage: indentation, saut de ligne, symboles : ou ; ... c'est cette structure physique qui est interprétée par le logiciel.

**Exercice 1** Dans ce premier problème, la partie A est indépendante des parties B et C.

### Partie A - Quelques exemples de séries

Dans chacun des cas, déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ , où  $u_n$  désigne le terme général défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

1.  $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$

2.  $u_n = \frac{n^2}{n!}$

3.  $u_n = \frac{(-1)^n}{(1+n)^2}$

Dans la suite de l'exercice, on souhaite résoudre un problème fonctionnel. On cherche en effet à déterminer les fonctions  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(*) \begin{cases} f(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall a > 0, f(a+1) + f(a) = \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

### Partie B - Existence et unicité de la solution du problème

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $a > 0$ , on pose :

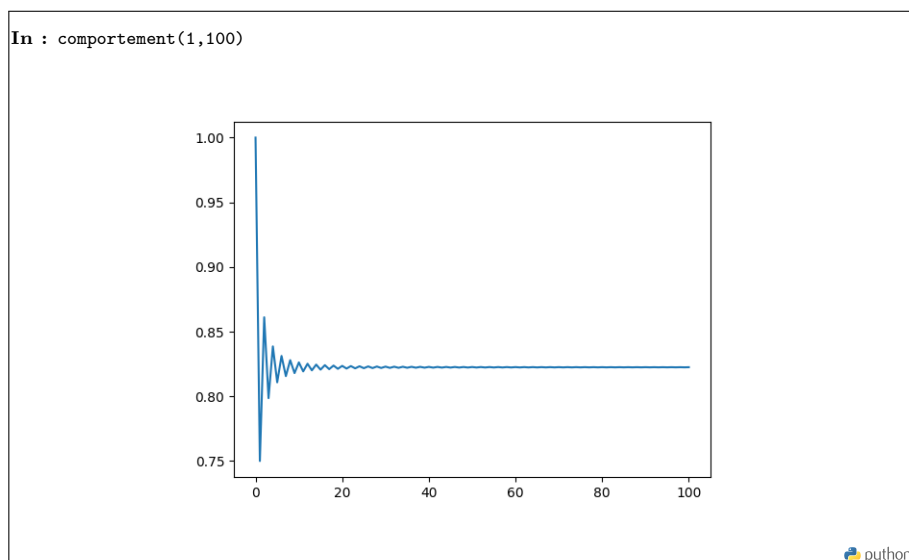
$$u_k(a) = \frac{(-1)^k}{(a+k)^2}$$

4. Dans le langage Python, construire la fonction *somme* qui pour tout couple  $(a, n)$  donné, renvoie la valeur de :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(a+k)^2}$$

On ajoutera un test conditionnel sur  $a$  afin de renvoyer un message d'erreur si celui-ci est  $\leq 0$ .

5. Construire alors le programme *comportement* qui pour tout couple  $(a, n)$  donné, renvoie la courbe des points  $(k, \text{somme}(a, k))$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et ceci pour illustrer le comportement asymptotique de la série  $\sum u_k(a)$ . Par exemple,



6. Enoncer le **critère spécial des séries alternées**.

7. Fixons  $a > 0$ . Montrer que la série  $\sum u_k(a)$  est convergente. On note alors pour tout  $a > 0$ ,

$$f(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(a)$$

8. Montrer que pour tout  $a > 0$ ,  $f(a+1) + f(a) = \frac{1}{a^2}$ .

9. Fixons  $a > 0$ . Justifier qu'on a :  $|f(a)| \leq \frac{1}{a^2}$ .
10. En déduire que  $f$  est solution du problème :

$$(*) \begin{cases} f(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall a > 0, f(a+1) + f(a) = \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

On considère  $g$  une autre solution du problème (\*).

11. Etablir que pour tout  $a > 0$ ,  $g(a) - g(a+2) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2}$ .
12. Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout  $a > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$g(a) + (-1)^n g(a+n+1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(a+k)^2}$$

13. En déduire que  $f$  est l'unique solution du problème (\*).

### Partie C - Expression de la solution sous forme intégrale

Fixons  $a > 0$ . On définit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la fonction  $h_k$  sur  $]0, 1]$  par  $h_k(t) = t^{a+k-1} \ln(t)$ .

14. Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 h_k(t) dt$  est convergente et vérifie :

$$\int_0^1 t^{a+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(a+k)^2}$$

15. Justifier alors que la fonction  $t \mapsto \frac{t^{a-1} \ln(t)}{1+t}$  est bien intégrable sur  $]0, 1]$ .
16. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} \ln(t)}{1+t} dt = \int_0^1 t^{a-1} \ln(t) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k dt \quad (**)$$

17. On note enfin pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = \int_0^1 |h_n(t)| dt$ .

(a) Montrer que la série  $\sum w_n$  est convergente.

(b) On admet que le résultat précédent nous permet d'échanger les symboles  $\sum$  et  $\int$  dans l'égalité (\*\*).  
Etablir alors que :

$$f(a) = - \int_0^1 \frac{t^{a-1} \ln(t)}{1+t} dt$$

Adapté du concours CCINP PC - 2021

**Exercice 2** Dans tout le problème, on note  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . De plus,

- on appelle **matrice stochastique** toute matrice  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  dont les coefficients sont positifs ou nuls et telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=1}^p m_{ij} = 1$$

c'est à dire que la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1.

- on appelle **matrice strictement positive** toute matrice  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  dont les coefficients sont strictement positifs.

Enfin, on rappelle qu'une **matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est maximal, ce qui équivaut à ce que le déterminant associé soit non nul**. On pourra bien entendu utiliser ce résultat si besoin.

## Partie A - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2, et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  pour lequel on définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  la valeur de l'état au temps  $n$ .

On suppose que les valeurs prises par  $X_{n+1}$  ne dépendent que de l'état au temps  $n$  de sorte que :

- si au temps  $n$  la particule est dans l'état 1, au temps  $n+1$  elle passe à l'état 2 avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- si au temps  $n$  la particule est dans l'état 2, au temps  $n+1$  elle passe à l'état 1 avec une probabilité  $\frac{1}{4}$ .

On suppose pour finir que  $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$ .

1. Représenter sur un graphe probabiliste les probabilités de transition entre les états 1 et 2.
2. Justifier que les événements  $(X_0 = 1)$  et  $(X_0 = 2)$  constituent un système complet d'événements.
3. En déduire la loi de  $X_1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note alors  $a_n = P(X_n = 1)$ ,  $b_n = P(X_n = 2)$  et on pose :

$$\mu_n = (a_n \quad b_n)$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction des valeurs prises de  $a_n$  et  $b_n$ , puis en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mu_{n+1} = \mu_n \cdot A, \text{ où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

5. Dans le langage Python, construire la fonction *loi* qui pour tout entier  $n$  donné, renvoie la matrice-ligne  $\mu_n$  qui définit la loi de  $X_n$ . On rappelle que le produit matriciel est défini par la commande **dot** du module **numpy** et ainsi, on a par exemple :

```
In : loi(100)
```

```
array([[0.33333333, 0.66666667]])
```



On introduit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  canoniquement associé à  $A$  et on pose  $P_A(X) = \det(X.I_2 - A)$  le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .

6. Vérifier que  $A$  désigne une matrice stochastique et strictement positive.
7. Calculer  $P_A(X)$  et préciser le spectre de  $A$ , c'est à dire l'ensemble des racines de  $P_A$  noté  $Sp(A)$ .
8. On note  $B = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer qu'il existe une base  $B' = (e'_1, e'_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.
9. Justifier alors qu'il existe  $Q \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que :

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

10. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mu_n = \mu_0 \cdot Q \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} Q^{-1}$ .

11. Déterminer  $Q^{-1}$ .

12. Préciser alors la limite de  $\mu_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La suite  $(X_n)$  représente en fait une chaîne de Markov, puisque son état à l'instant  $n+1$  ne dépend que de son état à l'instant  $n$ . Plus généralement, une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$  est entièrement définie par la donnée de  $X_0$  et d'une matrice stochastique  $A$  décrivant les probabilités de transition entre les états.

Ainsi, comme l'illustre la **partie A**, si  $\mu_n = (P(X_n = 1), \dots, P(X_n = p))$ , alors l'étude de la convergence de la suite  $(\mu_n)$  revient à étudier la convergence de la suite  $(A^n)$ , et c'est l'objet des parties suivantes.

## Partie B - Spectre d'une matrice stochastique et strictement positive

On considère une matrice stochastique et strictement positive  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

On introduit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  canoniquement associé à  $A$  et on définit encore  $P_A$  le polynôme caractéristique associé à  $A$  par  $P_A(X) = \det(X.I_p - A)$ . On note pour finir  $Sp(A)$  l'ensemble des racines de  $P_A$ .

13. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Montrer que :

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}) \neq \{0\}$$

14. On pose  $u = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$ . Calculer  $f(u)$ , et montrer que nécessairement  $1 \in Sp(A)$ .

15. On rappelle que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ , on note  $\|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} |x_i|$ . Etablir alors que :

$$\|f(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

16. Soit  $\lambda \in Sp(A)$ , éventuellement complexe. Montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .

On admet alors le **théorème de Perron-Frobenius** : 1 est la seule valeur propre de module 1 et en notant  $\lambda_2, \dots, \lambda_r$  les autres valeurs propres distinctes telles que  $|\lambda_i| < 1$ , il existe une base  $B'$  dans laquelle la matrice est diagonale par blocs :

$$\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_r \end{pmatrix}$$

où pour tout  $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$ ,  $T_i$  est un bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

## Partie C - Comportement asymptotique de la chaîne de Markov

Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda| < 1$  et  $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & n_{12} & \dots & n_{1p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n_{p-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Justifier brièvement que  $N^p = 0$ .

18. Fixons  $k \in \mathbb{N}$ . Etablir, quand  $n \rightarrow +\infty$ , que  $\binom{n}{k}$  est équivalent à  $\frac{n^k}{k!}$ . En déduire la limite de  $\binom{n}{k} \lambda^{n-k}$ .

19. Montrer alors que la suite de matrices  $((\lambda I_p + N)^n)$  converge vers la matrice nulle quand  $n \rightarrow +\infty$ .

20. **En reprenant les résultats et notations de la partie B**, montrer qu'il existe  $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$  telle que :

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_r \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et en déduire que la suite  $(A^n)$  est convergente.

**Adapté du concours CCINP MP - 2017**