

Exercice 1 (matrice d'un endomorphisme cyclique).

[]

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E , et on note $B = (f^{n-1}(a), \dots, f(a), a)$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base B .
3. De la même façon, déterminer la matrice de $f^2, f^3, \dots, f^n$ dans cette base.

Exercice 2 (diagonalisation d'un projecteur).

[]

Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M .

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Ces sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer alors une base dans laquelle la représentation matricielle est plus simple.

Exercice 3 (un isomorphisme à valeurs dans l'espace dual).

[]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ l'espace dual associé à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Etablir que $f_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{tr}(AX)$ désigne une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On note alors $\theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ définie par :

$$\theta(A) = f_A$$

Montrer que θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 4 (réduction des endomorphismes).

[]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Etudier le noyau de f , celui de $f + id$, et celui de $f - 5id$.
2. Justifier alors qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

3. Calculer alors P^{-1} , puis donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n .

Exercice 5 (matrices de rang 1).

[]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\text{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow$ il existe des matrices colonnes non nulles telles que $A = X.Y^T$.
2. On suppose que $\text{rg}(A) = 1$. Etablir que A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \star \\ 0 & \dots & 0 & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$$

3. En déduire que $A^2 = \text{tr}(A).A$, puis calculer :

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n A^k / k!$$

On pourra discuter suivant les valeurs de $\text{tr}(A)$.

Exercice 6 (matrices réelles semblables).

★★★ []

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir alors qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (étude des matrices de trace nulle).

★★★ []

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f désigne une homothétie, c'est à dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda.x$$

2. Montrer alors que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de coefficients diagonaux tous nuls.

3. Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\text{tr}(A) = 0$
- $\exists (U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, A = UV - VU$

On pourra introduire $\phi : M \mapsto MD - DM$ avec $D = \text{diag}(1, \dots, n)$.

Exercice 8 (exponentielle d'une matrice diagonalisable et déterminant).

[]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D \text{ une matrice diagonale.}$$

1. Montrer que la trace est un invariant de similitude.

2. On considère ici A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Etablir que A est diagonalisable de sorte que A soit semblable à la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et pour laquelle on précisera la valeur de } \alpha$$

- (b) Etablir que la série vectorielle $\sum A^k/k!$ est convergente. On note $\exp(A)$ sa limite.

- (c) En déduire que $\det(\exp(A)) = 1$.

3. Plus généralement, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on suppose diagonalisable. Etablir que :

$$\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$$

Exercice 9 (calcul d'un déterminant par opérations sur les lignes et les colonnes).

[]

Fixons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que l'application $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mapsto AM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Montrer alors que $\det(f) = (\det(A))^2$.

Exercice 10 (inversibilité d'une matrice triangulaire par blocs).

[]

On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.
2. Et dans ce cas, exprimer M^{-1} sous la forme d'une matrice par blocs.

Exercice 11 (une application du déterminant de Vandermonde).

[]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et considérons $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ des points de I .

1. Montrer qu'il existe une famille de polynômes $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\forall (i, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_i(x_k) = \delta_{ik}$$

Ces polynômes sont appelés les **polynômes de Lagrange** associés aux points (x_k) .

2. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ désigne une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(x_k) = f(x_k)$.
3. Etablir l'existence et l'unicité du polynôme P à l'aide d'un déterminant de Vandermonde.

Exercice 12 (une autre application du déterminant de Vandermonde).

★★★ []

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k)$$

On cherchera alors à préciser la valeur de a_k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Exercice 13 (déterminant de l'opérateur transposée).

X/ENS []

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $T(M) = M^T$. Calculer le déterminant de cet endomorphisme.

Exercice 14 (décomposition de Fitting).

X/ENS []

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que les suites $(\dim(u^k))$ et $(\dim(\ker(u^k)))$ sont strictement monotones pour l'inclusion et constantes à partir d'un même rang $p \leq n$.
2. Etablir que la suite $(\dim(\ker(u^k)))$ "s'essoufle", c'est à dire que la suite des différences $(\dim(\ker(u^{k+1})) - \dim(\ker(u^k)))$ est décroissante.
3. Montrer qu'on a $E = \ker(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.
4. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & O \\ O & C \end{pmatrix}$, où N est une matrice carrée nilpotente, C une matrice inversible.

Exercice 15 (matrices à diagonale dominante).

X/ENS []

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est à **diagonale dominante** si et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

1. Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est nécessairement inversible.
2. En déduire que les valeurs propres d'une matrice A quelconque appartiennent à l'union pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ des disques de centre a_{ii} et de rayon $R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$.
3. On se place dans le cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et A désigne une matrice à diagonale dominante avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ii} > 0$. Justifier que $\det(A) > 0$.