

Exercice 1 (incompatibilité et indépendance).

[]

Fixons $a \in]0, 1[$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (1 - a)a^n$.

- On définit $P : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ une application σ -additive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = p_n$. Justifier que P est bien une mesure de probabilité.
- On considère les événements $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.
 - Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
 - Ces événements sont-ils incompatibles ? Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 2 (tirage à l'infini avec remise).

[]

On considère une urne qui contient deux boules vertes et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit l'événement $E =$ "on obtient au moins une boule rouge" et on cherche à calculer $P(E)$ par trois méthodes. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

- $A_n =$ "on obtient la boule rouge au n -ème tirage"
 - $B_n =$ "on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages"
 - $C_n =$ "on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages"
- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.
 - Exprimer E en fonction des événements A_n et en déduire $P(E)$.
 - Exprimer E en fonction des événements B_n et retrouver $P(E)$.
 - Exprimer $\bar{E}$ en fonction des événements C_n et retrouver $P(E)$.
 - Que dire de l'événement E ?

Exercice 3 (formule des probabilités totales).

[]

On lance une seule fois une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages successifs dans une urne, qui contient initialement une boule blanche et une boule noire, selon le protocole suivant :

- on tire une boule et on note sa couleur, et on la remet dans l'urne ;
- de plus, on ajoute une boule blanche si on a obtenu pile, ou on ajoute une boule noire si on a obtenu face.

Ainsi au k -ème tirage, l'urne contient $k + 1$ boules.

- Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k -ème tirage.
- Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k -ème tirage, calculer la probabilité p_k d'avoir obtenu pile.
- Calculer la probabilité d'obtenir k boules blanches lors des k premiers tirages.

Exercice 4 (probabilité d'une réunion et d'une intersection dénombrables).

[]

On dispose de deux pièces de monnaie : la pièce A amène pile avec la probabilité a ($0 < a < 1$) et la pièce B amène pile avec la probabilité b ($0 < b < 1$). Au départ, on choisit l'une des deux pièces au hasard de façon équiprobable. Puis, on effectue le lancer avec cette pièce :

- si on obtient pile, on conserve la même pièce pour le lancer suivant ;
- si on obtient face, on change de pièce pour le lancer suivant.

En itérant la procédure, on obtient une suite infinie de lancers, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

$E_n =$ "on utilise pour la première fois la pièce A au n -ème lancer"
 $U_n =$ "on a obtenu n piles au cours des n premiers lancers"

- Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les probabilités $P(E_n)$ et $P(U_n)$.
- Calculer alors $P(\cup_{n=1}^{+\infty} E_n)$. Que peut-on en déduire ?
- Calculer alors $P(\cap_{n=1}^{+\infty} U_n)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 (calcul d'une probabilité par relation de récurrence). []

On lance indéfiniment une pièce de monnaie déséquilibrée, amenant pile avec la probabilité $2/3$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'évènement $A_n =$ "après le n -ème lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs" et $a_n = P(A_n)$. On définit enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$P_n =$ "on obtient pile au n -ème lancer"

$F_n =$ "on obtient face au n -ème lancer"

1. Calculer a_1, a_2 et a_3 .
2. En utilisant le système complet d'évènements $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$$

3. Déterminer alors l'expression de a_n , puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 6 (problème de la ruine du joueur). ★★★ []

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ avec $p \neq 1/2$ et on note $q = 1 - p$.

On joue à un jeu de pile ou face et à chaque coup, on a la probabilité p d'obtenir pile et dans ce cas, on gagne 1 EUR et la probabilité q d'obtenir face et dans ce cas, on perd 1 EUR.

On suppose qu'on ne peut jouer que si l'on dispose d'au moins 1 EUR. De plus, on décide que le jeu s'arrête soit lorsqu'on possède la somme de N EUR et on gagne la partie, soit parce qu'on est ruiné.

Au départ, on dispose d'une somme de n euros avec $0 \leq n \leq N$ et on note $p_N(n)$ la probabilité de gagner la partie à partir de ces n euros.

1. Calculer $p_N(0)$ et $p_N(N)$.
2. En raisonnant sur les résultats du premier tirage, déterminer une relation entre $p_N(n)$, $p_N(n+1)$ et $p_N(n-1)$.
3. Exprimer alors $p_N(n)$ en fonction de n, N et p , puis calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(n)$.

Exercice 7 (étude de la descendance). []

On étudie la descendance d'une fleur. A l'instant 0, on dispose d'une fleur F_0 et cette fleur peut avoir, à l'instant 1, deux descendance avec la probabilité $p \in]0, 1[$ ou aucune descendance avec la probabilité $q = 1 - p$, puis elle meurt. Les descendance de la première fleur peuvent avoir, à l'instant 2, des descendance de façon mutuellement indépendante et dans les mêmes conditions que la première fleur, puis elles meurent... et ainsi, de suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n =$ "la lignée de la fleur F_0 est éteinte à l'instant n " et $u_n = P(U_n)$.

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Justifier que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.
3. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n^2 + 1 - p$.
4. Montrer que $\ell = \min(1, \frac{q}{p})$. En déduire alors la probabilité $P(\cup_{n=1}^{+\infty} U_n)$ que la lignée s'arrête.

Exercice 8 (étude d'une chaîne de Markov). CCINP 101 []

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau notés A, B et C . A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A . Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement "l'animal se trouve en A (resp. en B , en C) après son n -ème trajet" et on pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .
2. De la même façon, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

On considère alors la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
4. Prouver que $-1/2$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
5. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $D = P^{-1}AP$.
6. Expliquer alors comment obtenir a_n, b_n et c_n en fonction de n .

Exercice 9 (fin du jeu pour une infinité de joueurs).

[]

Des joueurs en nombre illimité, notés $J_1, J_2, \dots, J_n, \dots$, s'affrontent dans un jeu de pile ou face. Ils jouent successivement et dans l'ordre des indices. Le jeu se termine lorsqu'un joueur obtient pile.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le joueur J_n obtient pile avec la probabilité $p_n \in]0, 1[$ et on note $q_n = 1 - p_n$. On pose d'ailleurs $q_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit enfin l'évènement $G_n =$ "le joueur J_n gagne".

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(G_n) = q_0 \dots q_{n-1} p_n$.
2. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \prod_{i=0}^n q_i$. Montrer que la suite (Q_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.
3. Etablir alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n P(G_k) = 1 - Q_n$.
4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p$ fixé dans $]0, 1[$. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?
5. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1/(n+1)^2$ fixé dans $]0, 1[$. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?

Exercice 10 (autour de la fonction d'Euler).

★★★★ []

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On choisit au hasard un nombre entier compris entre 1 et n . Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $A_p =$ "l'entier choisi est divisible par p ".

1. Calculer $P(A_p)$. Qu'obtient-on si p est un diviseur de n ?
2. On note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers distincts de n . Montrer que les évènements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On définit alors ϕ la **fonction indicatrice d'Euler** sur $\mathbb{N}^*$ par $\phi(n) = \text{card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = 1\}$. Dédurre des questions précédentes que $\phi(n) = n \prod_{i=1}^r (1 - \frac{1}{p_i})$.

Exercice 11 (un exemple de tirage sans remise).

CCINP 109 []

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées $B_1, \dots, B_n$ et deux boules noires numérotées N_1, N_2 . On effectue le tirage une à une et sans remise de toutes les boules de l'urne.

On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

Exercice 12 (existence de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète).

CCINP 100 []

Soit $\lambda > 0$ et considérons X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$, puis déterminer la valeur de λ .
2. Prouver que X possède une espérance, puis la calculer. La variable X admet-elle une variance ?

Exercice 13 (autour de la loi de Poisson).

CCINP 103 []

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 qu'on suppose indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, puis en déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soient $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$. On note Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . On suppose de plus que X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) . Déterminer la loi de X .

Exercice 14 (problème des appels téléphoniques).

CCINP 98 []

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que ces appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus à l'issue de ces n appels.

1. Préciser la loi de X .
2. La secrétaire rappelle une seconde fois et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - (a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(Y = k | X = i)$.
 - (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale. On pourra utiliser l'égalité : $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{n}{k} \binom{n}{i}$.
 - (c) Donner alors l'espérance et la variance de Z .

Exercice 15 (couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$).

CCINP 108 []

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple est donné par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

- Déterminer les lois de X et de Y .
- (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 16 (loi du max et loi du min).

CCINP 106 []

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ qu'on suppose indépendantes. Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k \text{ avec } p \in]0, 1[\text{ et } q = 1 - p$$

On considère alors les variables $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

- Déterminer la loi du couple (U, V) .
- En déduire la loi marginale de U .

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.

- Prouver que la variable $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V .
- U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 17 (étude du nombre de succès après un premier succès).

[]

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Un individu joue avec une pièce non nécessairement équilibré : la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N le nombre de lancers nécessaires. Si pile apparaît au n -ième lancer, il lance à nouveau cette pièce n fois et on note X le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers.

- Préciser la loi de N ainsi que la loi conditionnelle de X sachant que $(N = n)$.
- Déterminer la loi du couple (N, X) .
- Démontrer que :

$$P(X = 0) = \frac{q}{1+q} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$

- Montrer alors que X a la même loi que le produit de deux variables indépendantes $Y \hookrightarrow B(1/1+q)$ et $Z \hookrightarrow G(1/1+q)$.
- En déduire $E(X)$.

Exercice 18 (loi de la distance entre deux variables aléatoires).

★★★ []

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X, Y \hookrightarrow G(p)$ avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$ et on définit $Z = |X - Y|$.

- Calculer $P(Z = 0)$ et établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$.
- Montrer que Z admet une espérance et déterminer son expression.
- Montrer que $E((X - Y)^2) = 2V(X)$. En déduire que Z admet une variance et la calculer.

Exercice 19 (un peu d'arithmétique avec la fonction ζ). []

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on rappelle que pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

On considère alors X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

- Justifier qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = "n \text{ divise } X"$. Montrer que $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ désigne des événements mutuellement indépendants.
- En déduire que $\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^s}) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

Exercice 20 (fonction génératrice).

CCINP 110 []

- Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ et on note R_X son rayon de convergence.
 - Prouver que $R_X \geq 1$.
On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X . Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$, puis pour tout $t \in [-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous la forme d'une espérance.
 - Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en le justifiant, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
- On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer D_{G_X} et pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
 - Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 . Déterminer en utilisant les questions précédentes la loi de $X + Y$.

Exercice 21 (formules de Wald pour une somme aléatoire). ★★★ []

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles et qui suivent toutes la même loi et considérons N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose de plus que N et les variables X_n sont mutuellement indépendantes. Enfin, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n X_k \text{ avec la convention } S_0 = 0$$

- Justifier que S_N est encore une variable aléatoire.
- On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la loi de S_N .
- On suppose que les variables aléatoires X_n sont aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$.
 - Etablir que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ sur $[0, 1]$.
 - Montrer que si $X_1, N \in L^1$, alors S_N est d'espérance finie et elle vérifie la **première formule de Wald** :

$$E(S_N) = E(X_1)E(N)$$

- Montrer que si $X_1, N \in L^2$, alors S_N possède un moment d'ordre 2 et elle vérifie la **seconde formule de Wald** :

$$v(S_N) = V(X_1)E(N) + E(X_1)^2 V(N)$$

Exercice 22 (utilisation des fonctions génératrices).

CCINP 96 []

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$.

La fonction génératrice associée est alors $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

- Justifier que G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$.
- Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer de deux façons que pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.
- Application** Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout $t \in]-1, 1[$ l'expression de $G_{S_n}(t)$, puis en déduire la loi de S_n .

Exercice 23 (deux inégalités classiques).

★★★ []

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On note X, Y deux variables aléatoires positives et prenant un nombre fini de valeurs.

(a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

- (b) En déduire l'**inégalité de Hölder** :

$$E(XY) \leq (E(X^p))^{1/p} (E(Y^q))^{1/q}$$

On pourra commencer par traiter le cas où $E(X^p) = E(Y^q) = 1$.

- (c) Quelle inégalité retrouve-t-on lorsque $p = q = 2$? En donner alors une preuve directe.

2. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Rademacher** si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$. On considère alors $(X_i)_{i \in [1, n]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

- (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $ch(t) \leq e^{t^2/2}$.

- (b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$E \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

- (c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$P \left(\exp \left(x \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) > e^{tx} \right) \leq 2e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

- (d) Montrer qu'on a alors l'**inégalité de déviation** : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul,

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

Exercice 24 (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: premier retour à l'origine).

★★★ []

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par :

$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = 1 - p, \text{ avec } p \in [0, 1]$$

On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et ainsi la suite (S_n) représente une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ de sorte que S_n représente l'abscisse d'un point mobile au bout de n déplacements.

1. (a) Déterminer $u_n = P(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On discutera suivant la parité de n .
 (b) On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum u_n x^n$. Etablir que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k =$ "le point mobile revient en 0 pour la première fois au bout de k déplacements", c'est à dire:

$$A_k = (S_k = 0) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (S_i \neq 0) \right)$$

On pose alors $v_k = P(A_k)$ avec $v_0 = 0$.

- (a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n P((S_n = 0) \cap A_k)$.
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$.

3. On note $g(x)$ la somme de la série entière $\sum v_n x^n$ et R son rayon de convergence.

- (a) Justifier que $R \geq 1$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \frac{f(x) - 1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}$.

- (b) On considère enfin l'évènement $A =$ "il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 0$ ". En discutant suivant les valeurs de p , déterminer la probabilité que le point repasse par l'origine.

Exercice 25 (chaîne de Markov).

X/ENS []

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$. On suppose que (X_n) est une chaîne de Markov homogène, c'est à dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x_0, \dots, x_{n+1} \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on ait :

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = p_{x_n, x_{n+1}}$$

Autrement dit, à tout instant, l'état au rang n ne dépend que de l'instant précédent et la probabilité de transition est donnée par les coefficients de la matrice P .

1. Justifier que P est une matrice stochastique.

2. (a) Soit $x_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $P(X_0 = x_0) \neq 0$. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \llbracket 1, N \rrbracket^n$,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | X_0 = x_0) = p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}$$

En déduire que $P(X_n = x_n | X_0 = x_0) = p_{x_0, x_n}^{(n)}$, le coefficient d'indice (x_0, x_n) dans la matrice P^n .

(b) Montrer avec $k \in \mathbb{N}^*$, qu'on a encore pour $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \neq 0$:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_{n+1}, \dots, X_k = x_{n+k} | X_0 = x_n)$$

3. On suppose de plus que tous les coefficients de P sont strictement positifs et on note $\epsilon = \min_{(i,j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2} p_{i,j}$. On fixe alors $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et on définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_n = \max_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} p_{i,j}^{(n)} \text{ et } v_n = \min_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} p_{i,j}^{(n)}$$

(a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} \leq (1 - \epsilon)u_n + \epsilon v_n \text{ et } v_{n+1} \geq (1 - \epsilon)v_n + \epsilon u_n$$

puis montrer qu'elles convergent vers une même limite.

(b) En déduire qu'il existe une matrice ligne Q sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ de réels positifs et de somme égale à 1 telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, P(X_n = j | X_0 = i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q_j$$

(c) Justifier que Q représente même la seule probabilité (matrice ligne stochastique) invariante par P , c'est à dire qui vérifie : $QP = Q$.