

Exercice 1 (étude de la diagonalisabilité).

CCINP 68 []

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver que A est diagonalisable :

- sans aucun calcul,
- en déterminant $\chi_A(\lambda)$ et à l'aide des sous-espaces propres,
- en utilisant le rang de la matrice,
- en calculant A^2 .

2. On suppose que A représente la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien muni d'une base orthonormée. Trouver alors une base orthonormée B' dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 2 (principe d'orthonormalisation de Schmidt).

[]

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

1. Montrer que l'application $(P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée (P_0, P_1, P_2) pour ce produit scalaire et telle que $\deg(P_i) = i$.

Exercice 3 (projeté orthogonal dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

[]

On travaille dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on définit ϕ par :

$$\forall (A, B) \in E^2, f(A, B) = \text{tr}(A^T B)$$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E .
2. On note $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (I_3, B) est une famille orthogonale.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\text{Vect}(I_3, B)$.

Exercice 4 (projecteur orthogonal).

[]

On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal et donner une base orthonormale de l'image.**Exercice 5** (distance d'une matrice à $S_n(\mathbb{R})$).

★★★ []

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Etablir que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires et orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la distance $d(M, S_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M .
3. On note $M = \sum_{i=1}^n E_{ii}$. Calculer $d(M, S_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 6 (borne inférieure d'un ensemble).

[]

Calculer la borne inférieure de :

$$\left\{ \int_0^1 x^2 |\ln(x) - ax - b|^2 dx, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 7 (cas particulier des espaces euclidiens).

CCINP 77 []

Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel A de E , on a $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Etablir que :

$$\begin{cases} (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \\ (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \end{cases}$$

Exercice 8 (somme de matrices et orthogonalité).

★★★ []

Soient $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A_1 + \dots + A_p \text{ est inversible et } \forall i \neq j, A_i^T A_j = 0$$

Montrer que $rg(A_1) + \dots + rg(A_p) = n$.**Exercice 9** (décomposition d'Iwasawa).

[]

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (O, T) tel que :

$$M = OT$$

avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et T une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.*Pour l'existence, on pourra noter u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et étudier la famille $(u(e_i))$.***Exercice 10** (endomorphisme qui commute avec son adjoint).

CCINP 63 []

Soit E un espace euclidien et pour tout endomorphisme u de E , on note u^* son adjoint.

1. Un endomorphisme u vérifiant pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$, est-il forcément l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad u \circ u^* = u^* \circ u$$

$$(ii) \quad \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$$

$$(iii) \quad \forall x \in E, \|u(x)\|_2 = \|u(y)\|_2$$

Exercice 11 (matrices symétriques positives).

CCINP 66 []

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Prouver que pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Etablir que pour tout $A \in S_n(\mathbb{R})$ et pour tout $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow A^2 B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (matrices symétriques).

[]

1. On considère $S \in S_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose nilpotente. Montrer que $S = 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et posons $S = A^T A$.
 - (a) Justifier que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, puis montrer que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
 - (b) On suppose maintenant que A est nilpotente et que $A^T A = A A^T$. Etablir que $A = 0$.

Exercice 13 (déterminant et inégalité de convexité).

★★★ []

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive telle que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, (AX|X) \leq \|X\|^2$$

1. Justifier que $\det(A) \in [0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\det(A)^t \leq \det(tA + (1-t)I_n)$.

Exercice 14 (autres inégalités sur le déterminant et la trace).

★★★ []

1. Montrer que pour tout $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $(\det(S))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{tr}(S)$.
2. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\det(A)| \leq (\frac{1}{n} \text{tr}(A^T A))^{n/2}$.

Exercice 15 (racine carrée d'une matrice symétrique définie positive).

★★★ []

Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. On définit la suite (R_n) par $R_0 = I_p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$$

1. Justifier que cette suite est bien définie et que chaque R_n est bien diagonalisable.
2. Montrer que la suite (R_n) converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vers une matrice $R \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

Exercice 16 (encadrement des valeurs propres).

[]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et posons $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

1. Justifier que $Sp(S) \subset \mathbb{R}$.
2. On note α, β la plus petite et la plus grande des valeurs propres de S . Etablir que pour tout $\lambda \in Sp(A)$,

$$\alpha \leq \lambda \leq \beta$$

Exercice 17 (nature d'un automorphisme orthogonal en dimension 3).

[]

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée directe B . Préciser alors la nature de u_i dont on donne ici la matrice dans B :

$$Mat_B(u_1) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } Mat_B(u_2) = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (suite de polynômes orthogonaux).

X/ENS []

On considère l'espace vectoriel $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et notons ω une fonction continue, strictement positive et intégrable sur $] -1, 1[$. On définit alors pour tout $(f, g) \in E^2$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\omega(t) dt$$

1. Etablir que $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .
2. Justifier qu'il existe une unique suite de polynômes (P_n) à coefficients dominants strictement positifs et tels que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $] -1, 1[$.
4. Soit $f \in E$. Montrer que la série $\sum \langle f, P_n \rangle^2$ converge et que $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, P_n \rangle^2$.

Exercice 19 (critère de Sylvester).

X/ENS []

On considère $A \in S_n(\mathbb{R})$. On appelle **mineur principal** de A tout déterminant obtenu de celui de A en supprimant les lignes et les colonnes dont les indices appartiennent aux entiers $\llbracket k, n \rrbracket$: autrement dit, c'est le déterminant de A privée de ses dernières lignes et colonnes.

1. Etablir que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.
2. Montrer que si les mineurs principaux sont seulement positifs ou nuls, alors A n'est pas nécessairement positive.

Exercice 20 (matrice symétrique définie positive).

X/ENS []

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$a_{ij} = \frac{1}{1 + |i - j|}$$

Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.