

Exercice 1 (résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1).

[]

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant les intervalles de résolution si nécessaire :

1. $y'(t) + y(t) = t^2$
2. $ty'(t) - y(t) = t \ln(t)$
3. $t(1 + t^2)y'(t) - y(t) = 1$
4. $y'(t) + y(t) \tan(t) = \cos^2(t)$
5. $y'(t) + y(t) = \sin(t) + 3 \sin(2t)$

Exercice 2 (raccordement des solutions).

[]

On considère l'équation différentielle : $ty'(t) + 2y(t) = \frac{t}{t^2 + 1} \quad (\mathcal{E})$.

1. Déterminer la solution générale de $(\mathcal{E})$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. L'équation $(\mathcal{E})$ admet-elle des solutions développables en série entière ?

Exercice 3 (solution définie sous la forme d'une intégrale à paramètre).

CCINP 30 []

1. Enoncer le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre.
2. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Exercice 4 (recherche d'un système fondamental de solutions à l'aide des DSE).

[]

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle linéaire :

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + (x^2 + 2)y(x) = 0$$

2. Donner alors un système fondamental de solutions de S_0 sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 5 (expression des solutions DSE).

[]

On considère l'équation différentielle linéaire :

$$4xy''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

Déterminer les solutions développables en série entière, puis exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 6 (résolution par changement de variable).

★★★ []

On considère sur $]1/2, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(2t - 1)y''(t) + (4t - 2)y'(t) + 4y(t) = 0 \quad (\mathcal{E})$$

1. En utilisant le changement de variable $x = 2t - 1$, montrer que la résolution de $(\mathcal{E})$ se ramène à la résolution sur $]0, +\infty[$ de $xy''(x) + xy'(x) + y(x) = 0 \quad (\mathcal{E}')$.
2. Déterminer une solution DSE de $(\mathcal{E}')$, puis donner les solutions de $(\mathcal{E})$ à l'aide d'une primitive de $t \mapsto e^t/t$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7 (méthode de Lagrange).

★★★ []

On considère l'équation différentielle définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$t^2 y''(t) - ty'(t) + y(t) = 1 - \ln(t)$$

1. Chercher une solution de l'équation homogène associée sous la forme $t \mapsto t^\alpha$.
2. En déduire la forme des solutions de l'équation complète.
3. Déterminer l'unique solution définie sur $]0, +\infty[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} t^2 y''(t) - ty'(t) + y(t) = 1 - \ln(t) \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 (calcul du wronskien).

★★★ []

On désigne par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et ϕ une fonction paire de classe C^∞ sur I . On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) + \phi(t)y(t) = 0$$

On note f_0 l'unique solution de cette équation sur I vérifiant $f_1(0) = 1$ et $f_1'(0) = 0$, et f_2 l'unique solution de cette équation sur I vérifiant $f_2(0) = 0$ et $f_2'(0) = 1$.

- Justifier que si y est solution de l'équation, alors y est de classe C^∞ sur I .
- Montrer que si y est solution de l'équation, alors $t \mapsto y(-t)$ est aussi solution de l'équation sur I .
- (a) Montrer que f_1 est paire et f_2 est impaire. Que pouvez-vous en déduire ?
(b) En déduire alors la forme des solutions paires définies sur I , et la forme des solutions impaires définies sur I .
- On note enfin W le wronskien associée aux fonctions f_1, f_2 . Etablir que W est constant et préciser sa valeur.

Exercice 9 (résolution d'un problème de Cauchy après diagonalisation).

[]

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 2 \text{ et } y(0) = -2$$

Exercice 10 (résolution après réduction).

[]

Déterminer les solutions des systèmes différentiels suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x' = -z \\ y' = x - y - z \\ z' = y - 2z \end{cases}, (S_2) \begin{cases} x' = x - y + 2z \\ y' = -x + y + 2z \\ z' = -x - y + 4z \end{cases} \quad \text{et } (S_3) \begin{cases} x' = 2y - 3z \\ y' = -2x + 4y - 5z \\ z' = z \end{cases}$$

Exercice 11 (étude qualitative des solutions).

★★★ []

On considère l'équation différentielle $y''(t) + q(t)y(t) = 0$, où q désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles et telle que :

$$\int_0^{+\infty} |q(t)| dt \text{ converge.}$$

- Soit f une solution bornée de cette équation. Montrer que $f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.
- Etablir alors qu'il existe nécessairement des solutions de l'équation qui ne sont pas bornées.

Exercice 12 (calcul de l'intégrale de Dirichlet à l'aide d'une équation différentielle).

X/ENS []

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ définie par :

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}$$

et on pose sous réserve d'existence $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt$.

- Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et de limite nulle en $+\infty$. Montrer également que G est définie sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $G_n : x \mapsto \int_0^n \frac{\sin(t)}{t+x} dt$. Justifier que G_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de limite nulle en $+\infty$. En déduire des propriétés analogues pour la fonction G .
- Etablir que F et G sont solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis justifier que pour tout $x > 0$, $F(x) = G(x)$.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.