

Exercice 1 (différentiabilité de la fonction inverse).

[]

On considère $\mathbb{C}$ muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Montrer que l'application :

$$f : z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/z$$

est différentiable en tout point et donner sa différentielle.

Exercice 2 (calcul d'une différentielle).

★★★ []

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_p : M \mapsto M^p$.

1. Montrer que f_1 est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $d(f_1)_M : H \mapsto H$.
2. Montrer que f_2 est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $d(f_2)_M : H \mapsto HM + MH$.
3. Montrer alors que pour tout $p \geq 2$, f_p est encore différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et qu'on a :

$$d(f_p)_M(H) = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i}$$

Exercice 3 (étude d'une fonction de classe C^1).

CCINP 57 []

On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

1. Montrer que f continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (étude d'une fonction de classe C^1).

CCINP 33 []

On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } f(0, 0) = 0$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 (étude d'une fonction de classe C^1).

CCINP 52 []

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Prouver que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. En déduire que f est bien définie.
2. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
 - (a) Justifier l'existence des dérivées partielles et les calculer.
 - (b) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 (différentielle et norme).

[]

1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et notons N une norme quelconque sur E . Etablir que N n'est pas différentiable en 0.
2. On se place maintenant dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$f(x) = \|x\|_2^2 \text{ et } g(x) = \|x\|_2$$

- (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle df_x en tout point de $x \in \mathbb{R}^n$.
- (b) En déduire que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et préciser sa différentielle.

Exercice 7 (calcul de la différentielle de la fonction inverse).

★★★ []

On note encore $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles, et on définit $f : M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$.

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. (a) Justifier rapidement que f est différentiable sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
(b) Montrer alors que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $df_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

Exercice 8 (fonctions harmoniques).

[]

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 sur l'ouvert U . On dit que f est **harmonique** si son laplacien est nul, c'est à dire :

$$\Delta f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

1. Montrer que $(x, y) \mapsto \arctan(\frac{y}{x})$ est harmonique sur son domaine de définition.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, et on définit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto P(x + iy)$.
(a) Justifier que le laplacien est linéaire.
(b) Montrer alors que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 (un exemple d'équation aux dérivées partielles).

★★★ []

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose de classe C^2 et on définit le laplacien de f par :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

On pose $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

1. Donner l'expression du laplacien Δf en coordonnées polaires.
2. Déterminer alors les fonctions harmoniques isotropes, c'est à dire les fonctions de classe C^2 de laplacien nul et indépendante de l'angle polaire.

Exercice 10 (étude des extremas).

[]

On considère l'application $f : (x, y) \mapsto y(x^2 + \ln^2(y))$.

1. Préciser son domaine de définition U et justifier qu'il s'agit bien d'un ouvert.
2. Déterminer les extremas locaux et globaux de f sur U .

Exercice 11 (étude des extremas sur un compact).

CCINP 56 []

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Admet-elle des extremas locaux ?
2. La fonction f admet-elle des extremas globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On note $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Etablir que f admet un maximum global sur K , puis le déterminer.

Exercice 12 (calcul du gradient et extremas).

★★★ []

Fixons $U \in \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et considérons $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(X) = X^T A X + 2U^T X$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et préciser $\nabla f(X)$ le gradient de f en X .
2. Etablir alors que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 13 (une preuve du théorème spectral).

★★★ []

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons u un endomorphisme symétrique de E . On définit alors l'application $f_u : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_u(x) = \frac{1}{\|x\|_2^2} \langle x, u(x) \rangle$$

1. Montrer que f_u est bornée sur $S(0, 1)$ et atteint ses bornes.
2. Etablir que f_u est composée d'applications différentiables et calculer sa différentielle en tout point.
3. Montrer alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe une BON formée de vecteurs propres de u .

Exercice 14 (méthode des multiplicateurs de Lagrange).

CCINP 41 []

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 4x^2 + 12x - y^2$ et considérons $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

- Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .
- Soit $a = (u, v) \in C$ un point en lequel f atteint un de ses extremums.
 - Justifier qu'il existe un réel λ tel que :
$$\begin{cases} 4u + 6v = \lambda \cdot u \\ 6u - v = \lambda \cdot v \end{cases}$$
 - Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$, puis déterminer les valeurs possibles de λ et donc du point a .
- En déduire le maximum et le minimum de f sur C .

Exercice 15 (inégalité de Carleman).

★★★★ []

Toutes ces questions sont extraites du concours Centrale 2024 - MP. La sous-partie II.A établit l'**inégalité arithmético-géométrique** avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la sous-partie II.B pour démontrer l'**inégalité de Carleman**.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.

II.A - Inégalité arithmético-géométrique

Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^n x_k \quad \text{et} \quad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) - s$$

On note X_s le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\}$.

- On admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n . Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U_n .
- Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$.
On pourra vérifier que f est strictement positive en certains points de $X_s \cap U_n$.

On note $a = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

- Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \frac{f(a)}{\lambda}$.
- Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

II.B - Démonstration de l'inégalité de Carleman

On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad F_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + (x_1 x_2)^{1/2} + (x_1 x_2 x_3)^{1/3} + \dots + (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad h_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1$$

On admet que F_n et h_n sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n .

On note H_n l'ensemble $H_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

- Déterminer le gradient de F_n et le gradient de h_n en tout point de U_n .
- Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n} \cap H_n$ admet un maximum.

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n \cap H_n$. On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $(a_1, \dots, a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint.

Pour k entre 1 et n , on note $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

7. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \frac{\gamma_2}{2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \end{cases}$$

8. En déduire que :

- (a) $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n$;
 (b) pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$, où :

$$\begin{cases} \omega_k = k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \text{ si } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ \omega_n = n \end{cases}$$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leq e$. On suppose par l'absurde que $\lambda > e$.

9. Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{k+1}$.

10. Démontrer que $\omega_1 \leq \frac{1}{e}$ et que, pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega_k \leq \frac{k}{k+1}$. On pourra démontrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,
 $\omega_{k+1} = \frac{1}{\lambda} \omega_k^k \left(1 - \frac{\omega_k}{k} \right)^{-k}$.

11. Aboutir à une contradiction sur ω_n . En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$,

$$\sum_{k=1}^n (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leq e$$

12. En déduire l'inégalité de Carleman : si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$