Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (séries entières et étude d'une marche aléatoire). **extrait du concours Centrale 2023 - PSI** [ ]

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.
Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in]0,1[\text{ et } q = 1-p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie. L'abscisse S_n du point à l'issue du n-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geq 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.
On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine. On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = P(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = P\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.
3. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.
4. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?
5. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, déterminer une expression de $A(x)$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation :
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$$
7. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.
8. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.
9. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?
10. En déduire que la probabilité de l'évènement " le point ne revient jamais en 0 " est égale à $|p - q|$.

Indications *Q1 on peut s'inspirer de ce qui est donné et travailler avec* $Z_k = \frac{1}{2}(X_k + 1) \sim B(p)$*... Q2 On traduit ce que signifier revenir à l'origine à l'instant* $2n$*, et ainsi cela revient à avoir eu* n *déplacements dans un sens et dans l'autre. Q4 On vérifie à quelles conditions* $1 \in B(0, R)$*. Q6 On peut introduire* R_k *l'évènement "on revient à 0 pour la première fois à l'instant* k*", et ensuite on aura un système complet d'évènements. Q7 Si on somme l'égalité précédente, on va relier* $A(x) - 1$ *au produit de deux sommes. Q10 Il suffit de calculer* $P(\cup_{k\geq 1} R_k) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Distinguez-vous ! Si on invoque un DSE usuel, on n'oublie surtout pas de préciser le domaine de convergence. D'ailleurs, on veillera à vérifier que les paramètres donnés nous permettent de rester dans cet intervalle de convergence.

Exercice 2 (transformée de Fourier d'une gaussienne). **extrait du concours Centrale 2016 - PSI** [ ]

On note :

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$, la **transformée de Fourier** de f, définie par :

$$\forall x,\ \mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi itx}\, dt$$

1. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

2. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

   (a) Justifier que ψ est développable en série entière.

   (b) Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} |\psi(x)|\, dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

   En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

3. Soit $f \in E_{cpm}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $f \in \mathcal{S}$.

   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^n(x) = (-2i\pi)^{(n)} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)e^{-2i\pi x}\, dt$$

5. On considère la fonction $\theta \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(t) = \exp(-\pi t^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = -2\pi x y(x)$$

   (b) Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. On rappelle d'ailleurs que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, dx = 1$, résultat qui n'est pas à redémontrer.

Indications *Q2a Il suffit de revenir aux DSE des fonctions usuelles sans oublier le domaine de convergence. Q4b On revient au critère C^k pour les intégrales à paramètre... et on n'oubliera pas qu'on peut éventuellement assurer une domination locale indépendante du paramètre. Q5 C'est un grand classique : en partant de l'expression dérivée, on peut mettre en place une intégration par parties pour retrouver cette équation.*

Distinguez-vous ! Pour la transformée de Fourier de la gaussienne, on peut à la main se ramener aux solutions de S_0 et obtenir la constante par valeur en 0... ou bien invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour identifier $\mathcal{F}(\theta)$ et θ.

Exercice 3 (interpolation de Lagrange et convergence uniforme). **extrait du concours Centrale 2022 - PC** [ ]

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et I est un segment $[a, b]$ où $a < b$. On considère n nombres réels distincts $a_1 < \cdots < a_n$ de I.

On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \ldots, a_n$ définis par (I.1) et on pose $W = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$.

Pour toute fonction f définie sur I, on définit le polynôme :

$$\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)L_i \tag{1}$$

$\Pi(f)$ désigne l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On l'appelle **polynôme interpolateur de Lagrange** de f associé à $a_1, \ldots, a_n$.

1. Soit r une fonction à valeurs réelles de classe C^n sur I et s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.

2. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^n sur I. Soit $P = \Pi(f)$ le polynôme interpolateur de f associé aux réels $a_1, \ldots, a_n$ comme défini en (II.1) ci-dessus. Pour tout $x \in I$, montrer qu'il existe $c \in I$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} W(x).$$

Pour x fixé dans I et distinct des a_i, on pourra considérer la fonction r définie sur I par $r(t) = f(t) - P(t) - K\,W(t)$ où le réel K est choisi de façon que $r(x) = 0$.

3. En déduire que $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \dfrac{M_n\,(b-a)^n}{n!}$, où $M_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

On considère encore un segment I et une fonction f définie sur I. De plus, pour tout entier naturel non nul n, on suppose donnés des réels distincts $a_{1,n} < \cdots < a_{n,n}$ de I et on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à ces réels $a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$.
En notant $L_{1,n}, L_{2,n}, \ldots, L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés à $a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$ on a donc :

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,n}) L_{i,n} \tag{2}$$

et $\Pi_n(f)$ est l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n(a_{i,n}) = f(a_{i,n})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Dans cette dernière section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et f est la restriction à I de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \exp(x).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme défini par (2). Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur I.

Indications *Q1 On applique le théorème de Rolle de façon itérée... mais on préfèrera écrire une récurrence. Q2 on peut remarquer que* $r(a_i) = 0$ *avant d'invoquer la question précédente pour obtenir une valeur de* K *en fonction de c, puis on majore* $K|W(x)|$ *sur* $[a, b]$. *Q4 On assure un contrôle de la différence en norme infinie : cela découle donc de Q3.*

Distinguez-vous ! Quand on applique le théorème de Rolle, on essaie de ne pas négliger la régularité... bien entendu, ici la fonction est de classe C^n et il n'y aura pas de souci, par contre c'est bien de préciser qu'on a à chaque fois, continuité sur $[a, b]$ et dérivabilité sur $]a, b[$.