

Modes de convergence en probabilité

Dans le dernier TD spécifique, on a mis en avant le théorème de Paul Lévy qui nous livrait une démonstration du **théorème central limite** : une convergence en loi vers la loi normale $N(0, 1)$. Cela nous permet asymptotiquement de remplacer un calcul de probabilités par le calcul d'une intégrale sur une fonction gaussienne... mais ce mode de convergence en loi n'est pas le seul et il conviendra d'en connaître d'autres : la **convergence en moyenne** ou la **convergence en probabilité**.

Définition Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et considérons (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur Ω , X une variable aléatoire définie sur Ω .

On dit que la suite (X_n) **converge en probabilité** vers X que l'on note $X_n \xrightarrow{\text{prob.}} X$ si :

$$\forall \epsilon > 0, P(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque On peut interpréter grossièrement cette limite : la probabilité que X_n "dévie" de X tend vers 0... ce qui signifie que X_n tend à se comporter comme X quand $n \rightarrow +\infty$. D'ailleurs, on retrouve justement ce contrôle de la déviation dans les **inégalités classiques de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev**.

Un exemple de condition suffisante mais non nécessaire : la convergence en moyenne

- Rappeler l'inégalité de Markov, puis démontrer cette inégalité.
- Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que (X_n) converge en moyenne vers une variable X si $E(|X_n - X|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Montrer que la convergence en moyenne entraîne la convergence en probabilité de la suite (X_n) .
- On considère alors (Z_n) une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes et suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$. On pose :

$$\forall n \geq 1, Y_n = \prod_{k=1}^n Z_k$$

- Calculer pour tout $n \geq 1$, $P(Y_n \neq 0)$.
- En déduire que (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.
- Calculer pour tout $n \geq 1$, $E(Y_n)$. La suite (Y_n) converge-t-elle en moyenne vers la variable certaine égale à 0 ?

Opérations algébriques et convergence en probabilité

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X, Y deux variables aléatoires discrètes qu'on suppose L^1 , et $(X_n), (Y_n)$ des suites de variables aléatoires discrètes. On note (*) la condition suivante :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, P(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall \epsilon > 0, P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et fixons $\epsilon > 0$. Justifier l'implication : $|x + y| \geq \epsilon \Rightarrow |x| \geq \epsilon/2$ ou $|y| \geq \epsilon/2$.
 - On suppose la condition (*) satisfaite. Montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{prob.}} X + Y$, c'est à dire :

$$\forall \epsilon > 0, P(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Montrer que $P(|X| > M) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$.
 - On suppose la condition (*) satisfaite. Montrer que $X_n Y_n \xrightarrow{\text{prob.}} XY$, c'est à dire :

$$\forall \epsilon > 0, P(|X_n Y_n - (XY)| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On revient à la définition de la limite : avec $\delta > 0$, on pourra introduire d'après la question précédente $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $P(|X| > a) \leq \delta$ et $P(|Y| > b) \leq \delta$...

La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi

Définition Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et considérons X une variable aléatoire réelle définie sur Ω .

On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(t) = P(X \leq t)$. En particulier, si X désigne une variable aléatoire discrète et positive telle que $x_i < x_{i+1}$, alors F_X désigne une fonction en escalier croissante et :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, x_1[, F_X(t) = P(X \leq t) = 0 \\ \forall t \in [x_1, x_2[, F_X(t) = P(X \leq t) = P(X = x_1) \\ \forall t \in [x_2, x_3[, F_X(t) = P(X \leq t) = P(X = x_1) + P(X = x_2) \\ \dots \end{cases}$$

Définition Avec les notations précédentes, et en considérant (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur Ω , on dit alors que la suite (X_n) **converge en loi** vers X que l'on note $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ si F_{X_n} converge simplement vers F_X en tout point de continuité de F_X .

Remarques

1. En particulier, lorsque toutes les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut établir que cela revient à avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

C'est exactement ce qu'on fait dans le **théorème d'approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale**.

2. Encore une fois, le théorème de Lévy est très pratique, car il permet de prouver cette convergence en loi en se ramenant aux fonctions caractéristiques.

6. Soient (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et X une autre variable aléatoire sur Ω . Etablir alors que :

$$X_n \xrightarrow{\text{prob.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

On revient à la définition de la limite en un point x en lequel F_X est continue : avec $\delta > 0$, on pourra introduire $\epsilon > 0$ tel que :

$$\begin{cases} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \epsilon) + P(|X_n - X| \geq \epsilon) \\ F_X(x - \epsilon) \leq F_{X_n}(x) + P(|X_n - X| \geq \epsilon) \end{cases}$$

avant de justifier que $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Remarque On pourra donc retenir la série d'implication étudiée ici :

convergence en moyenne $\Rightarrow$ convergence en probabilité $\Rightarrow$ convergence en loi

En fait, il existe même un dernier mode de convergence qui entraîne aussi la convergence en probabilité, mais celui-ci est hors programme et son utilisation délicate : c'est la **convergence presque sûre** définie par :

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \text{ si } P(\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$$