

Réduction des automorphismes orthogonaux

Dans ce TD spécifique, on revient sur les endomorphismes remarquables d'un espace euclidien. Bien entendu, parmi ces derniers, il faut considérer les **endomorphismes symétriques** et pour lesquels le théorème spectral nous livre une réduction en base orthonormale. D'ailleurs, on peut aussi étudier les **automorphismes orthogonaux** : ils ne sont pas a priori diagonalisables, mais on peut montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice associée est **diagonale par blocs**... c'est cette forme de réduction que nous irons chercher ici.

Définition Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle qu'un tel endomorphisme est dit **orthogonal** si u est inversible avec $u^* = u^{-1}$, c'est à dire pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$$

On note alors $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux.

Remarques

1. On rappelle qu'un tel endomorphisme se caractérise facilement :

$u \in O(E) \Leftrightarrow u$ conserve le produit scalaire ou encore la norme euclidienne au sens où :

$$\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} \|u(x)\|_2 = \|x\|_2 \\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \end{cases}$$

2. Si B désigne une base orthonormale de E , alors on a aussi la caractérisation :

$u \in O(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$, au sens où $M = \text{Mat}_B(u)$ est inversible avec $M^{-1} = M^T$

3. Attention au vocabulaire dans la cadre des projecteurs et des symétries... il faudra bien distinguer ces endomorphismes orthogonaux (relativement à l'adjoint) de la notion de **projecteur orthogonal** et **symétrie orthogonale** (relativement aux sous-espaces sous-jacents).

Concrètement, un projecteur orthogonal n'est pas toujours inversible... et ne peut pas appartenir à $O(E)$! Par contre, une symétrie orthogonale est bien un automorphisme orthogonal.

Cas particulier de la dimension 2

1. On suppose que E désigne un espace euclidien de dimension 2 dont on note B une base orthonormée de E . On considère $u \in O(E)$ et $M = \text{Mat}_B(u) \in O_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $M \in \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\}}_{R(\theta)}, \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \right\}}_{S(\theta)}, \theta \in \mathbb{R}$.

La réciproque est immédiate, et cela nous permet d'identifier les automorphismes orthogonaux **en petite dimension... ce sont des rotations ou des symétries vectorielles**.

En effet,

- si $M = R(\theta)$, alors on vérifie que pour tout $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$MX = a \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et on retrouve l'image de } X \text{ par la rotation d'angle } \theta.$$

- si $M = S(\theta)$, alors $S(\theta)^2 = I_2$ et on retrouve la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Ker}(u - id)$ et dans ce dernier cas, M est même diagonalisable en base orthonormée !

Cas général : réduction des automorphismes orthogonaux

On suppose désormais que E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ dont on note B une base orthonormée de E . On considère $u \in O(E)$ et $M = \text{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Justifier que $Sp(u) \subset \mathbb{U} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$.
 (b) Soit F un sous-espace vectoriel stable par u . Montrer que l'endomorphisme induit u_F est un automorphisme orthogonal sur F , puis que $F^\perp$ est encore stable par u .
 (c) On note χ_u le polynôme caractéristique de u qu'on factorise en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$. Etablir que u possède au moins une droite ou plan vectoriel stable par u .
 On pourra discuter la présence d'une racine réelle...

3. Par récurrence sur $n \geq 2$, montrer alors que pour tout automorphisme $u \in O(E)$, il existe une base orthonormée B dans laquelle la matrice de u est **diagonale par blocs** avec, des blocs carrés de taille 1 de la forme (± 1) ou des blocs carrés de taille 2 de la forme $R(\theta)$, avec $\theta \neq 0 [\pi]$ de sorte qu'on a toujours, quitte à permuter les vecteurs de base :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \\ \vdots & \ddots & & (0) & \vdots \\ & & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & R(\theta_1) & \\ \vdots & (0) & & & \ddots & \vdots \\ & \dots & \dots & \dots & R(\theta_p) \end{pmatrix}$$

Application

On note enfin $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$

4. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$.
5. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles antisymétriques de taille n . Montrer que l'application :

$$\exp : A_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$$

est bien définie et qu'elle désigne une application surjective.