

Espaces complets et application

En topologie, nous avons vu que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et plus généralement, les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie pouvaient nous faciliter les choses. En effet, les normes étant toutes équivalentes, on peut alors étendre le théorème de Bolzano-Weierstrass, la notion de convergence absolue, caractériser les parties compactes...

De plus, on peut montrer que ces espaces sont aussi **complets**, dans le sens où toute **suite de Cauchy** est nécessairement convergente. C'est très pratique, car cela nous donne un autre critère de convergence.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et notons $\|\cdot\|$ une norme sur E . On dit qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ désigne une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|u_{n+p} - u_n\| \leq \epsilon$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang, la distance entre deux termes quelconques est toujours négligeable.

Remarque Cette définition en ϵ n'est pas toujours simple à manipuler, et on essaiera parfois d'exhiber une suite réelle (α_n) de limite nulle telle que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \|u_{n+p} - u_n\| \leq \alpha_n$$

Dans ce cas, on a alors pour $\epsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \alpha_n \leq \epsilon \text{ et donc, } \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|u_{n+p} - u_n\| \leq \alpha_n \leq \epsilon$$

et ainsi, la suite (u_n) est bien de Cauchy. On retiendra donc que cette majoration par une suite (α_n) de limite nulle et indépendante de p nous donne un moyen pratique pour justifier qu'une telle suite est de Cauchy.

1. (a) Fixons $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. On considère les suites complexes (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = q^n \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^n q^k$$

Etablir que (u_n) et (v_n) désignent des suites de Cauchy.

- (b) Plus généralement, on considère (u_n) une suite convergente de E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Montrer que (u_n) est nécessairement de Cauchy.

Remarque Malheureusement, la réciproque n'est pas immédiate et il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas... En effet, on peut par exemple revenir sur la suite $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$: il s'agit là d'une suite de Cauchy mais sa limite n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Ainsi, toute suite de Cauchy d'un espace donné n'est pas nécessairement convergente dans cet espace.

Pourtant, on peut montrer que celle-ci est quand même vraie lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Soit (u_n) une suite de E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, qu'on suppose de Cauchy.

2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Ainsi, on pourra retenir le théorème suivant, même si celui-ci est tout à fait hors programme :

Théorème 1 (espaces de Banach).

Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et plus généralement, dans tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé E de dimension finie, toute suite de Cauchy est convergente.

On dit que ces espaces sont **complets** ou qu'ils représentent des **espaces de Banach**.

Remarque Ce résultat est très joli, mais on retiendra surtout son intérêt : pour montrer qu'une suite est convergente dans de tels espaces, il suffit en fait de montrer qu'elle est de Cauchy.

4. Application

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et considérons $f : E \rightarrow E$ une application qu'on suppose contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Montrer qu'il existe un unique point fixe $x \in E$ tel que $f(x) = x$. On pourra vérifier que celui-ci est donné par la limite

$$\text{de la suite } (u_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ définie par } \begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

Ce dernier résultat n'est d'ailleurs pas anodin... il s'agit d'un théorème de point fixe pour une application contractante et c'est même lui qui, sous certaines conditions, nous livre une preuve du **théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**.