

Etude d'une intégrale à paramètre : la transformée de Laplace

On a déjà étudié de nombreuses intégrales généralisées classiques : l'intégrale de Dirichlet, l'intégrale de Gauss, quelques intégrales jumelles... et en particulier, on peut distinguer la **transformée de Laplace**.

Il s'agit en fait d'une **intégrale à paramètre** qui permet de transformer un problème fonctionnel en un problème algébrique. Nous verrons alors comment la résolution d'une équation différentielle linéaire peut se ramener à une simple résolution d'équation du premier degré.

Définition Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. On appelle **transformée de Laplace** de f l'intégrale généralisée notée $\mathcal{L}(f)$ et définie pour tout $p > 0$ par :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

De plus, on admet le **théorème des moments nuls** :

Théorème 1 (des moments nuls).

Soit h une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles pour laquelle on suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 h(u)u^n du = 0$$

Alors, $h = 0$.

► La démonstration repose en fait sur le théorème de Stone-Weierstrass et les théorèmes de passage à la limite sous le signe intégral.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Justifier que pour tout $p > 0$ la fonction $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer la transformée de Laplace associée à chacune des fonctions suivantes :
 - $f : t \in \mathbb{R} \mapsto 1$
 - $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(at)$ ($a \in \mathbb{R}$)
 - $h : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(at)$ ($a \in \mathbb{R}$)

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et considérons $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qu'on suppose continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$. Etablir que :

$$\forall p > 0, \mathcal{L}(\lambda f + g)(p) = \lambda \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p)$$

4. Si de plus f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivées successives bornées sur $\mathbb{R}_+$, montrer que :

$$\forall p > 0, \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$$

puis, retrouver l'expression de $\mathcal{L}(f'')(p)$ en fonction de $\mathcal{L}(f)(p)$.

5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose encore continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $g : t \in [0, +\infty[\mapsto \int_0^t f(u)e^{-u} du$.
Montrer que g est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{L}(f)(n+1) = n\mathcal{L}(g)(n)$$

6. Etablir alors que la transformation de Laplace $\mathcal{L} : f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective.

Remarque Les questions 2 et 6 nous donnent en fait une correspondance entre des fonctions de la variable t et leurs transformées de Laplace. On peut ainsi aisément passer d'un domaine à l'autre grâce à de simples tables de calcul, qui peut-être vous ont déjà été présentées en S.I.

Application à la résolution d'un problème de Cauchy

7. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(2t) \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

En utilisant la transformation de Laplace, déterminer l'unique solution de ce problème de Cauchy.