

Calcul de $\zeta(2m)$ à l'aide des polynômes de Bernoulli

On a déjà rencontré plusieurs suites de polynômes utiles : approximation locale, interpolation, base dénombrable de polynômes orthogonaux, approximation uniforme...

Par ailleurs, on peut aussi considérer la suite des **polynômes de Bernoulli** puisque leur connaissance nous permettra de déterminer la valeur exacte de ζ pour les entiers pairs. On pourra ainsi retrouver de jolis résultats :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \dots$$

Dans tout le sujet, on rappelle qu'on définit la fonction ζ de Riemann sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

Un premier cas particulier, le calcul de $\zeta(2)$

1. Exhiber deux nombres réels α et β tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$, puis vérifier que pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

2. Si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, établir le **lemme de Riemann-Lebesgue** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

3. En utilisant la question 1, retrouver la valeur de $\zeta(2)$.

Définition des polynômes de Bernoulli

On considère la suite de polynômes (B_n) définis par $B_0(X) = 1$ et les conditions de récurrence :

$$B'_{n+1}(X) = B_n(X) \text{ avec } \int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \quad (*)$$

Autrement dit, B_{n+1} désigne une primitive de B_n qui en plus, satisfait la condition intégrale : $\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0$.

Les polynômes $n!B_n$ ainsi construits sont appelés les **polynômes de Bernoulli**.

4. Montrer que $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ et $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$.
5. Etablir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = \frac{X^n}{n!} + Q_n(X)$ avec $\deg(Q_n) < n$.
6. En utilisant la condition intégrale, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

On définit une suite de polynômes (C_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$

7. Montrer que la suite (C_n) vérifie les mêmes conditions de récurrence $(*)$.
8. Etablir alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = B_n$.
9. Préciser pour toute valeur de n impair et $n \geq 3$, les valeurs $B_n(0)$, $B_n(1)$ et $B_n(\frac{1}{2})$.

Calcul explicite de $\zeta(2m)$

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_n ci-dessous définie sur $]0, 1[$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$:

$$\forall t \in]0, 1[, \phi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$$

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et pour tout $t \in]0, 1[, \phi_n(1 - t) = (-1)^n \phi_n(t)$. Montrer alors que ϕ_n peut être prolongée par continuité sur $[0, 1]$.

On admet alors que de la même façon, on peut aussi la prolonger en une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$.

12. Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt$.

Soit $n \geq 3$. Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$, puis justifier que pour tout $p \geq 1$:

$$\forall k > 0, I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$$

13. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule établie à la question 1, calculer $\int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2n+1)\pi t) dt$ en fonction de m, n et $B_{2m}(0)$. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} (2\pi)^{2m} \frac{B_{2m}(0)}{2}$$

14. On donne $B_4(X) = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720}$. Retrouver alors que :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Remarque Autrement dit, même sans connaître explicitement la fonction ζ , on peut à partir des seuls polynômes de Bernoulli, déterminer les valeurs de cette fonction pour tous les entiers pairs... à condition bien entendu de soigner les calculs donnant les polynômes B_n !